ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

Матрицы. Определение. Символика. Основные понятия. Типы матриц. Действия над матрицами.

Определители. Определение. Символика. Основные понятия. Свойства определителей.

Минор. Алгебраическое дополнение. Вычисление определителей с помощью разложения по элементам выбранного ряда.

Невырожденная матрица. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.

Ранг матрицы.

Системы линейных уравнений. Формы записи. Исследование СЛУ на совместность (число решений). Теорема Кронекера – Капелли.

Решение невырожденных СЛУ. Метод обратной матрицы (матричное уравнение). Формулы Крамера.

Решение СЛУ методом Гаусса.

Литература: 1.Д.Т. Письменный «Конспект лекций по высшей математике» 1 часть. Глава 1.
2. Лунгу К.Л. «Сборник задач по высшей математике» 1 курс. Глава 1,2.
3. Любые другие книги и интернет ресурсы. Рекомендация: сайт http://www.mathprofi.ru/

определение:

<u>Матрица</u> – прямоугольная таблица элементов (чисел), содержащая **m** – строк одинаковой длины (или **n** – столбцов одинаковой длины).

символика: $\underset{mxn}{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$ или, сокращённо, $\underset{mxn}{A} = \left(a_{ij}\right)$,

где i=1, 2, ..., m – номер строки, j=1, 2, ..., n – номер столбца.

основные понятия: ***mxn*** – размер матрицы, запись $\underset{mxn}{A}$;

a_{ij} – элементы матрицы – числа (могут быть функции, параметры, буквенные символы);

<u>Главная диагональ матрицы</u> – элементы, идущие из верхнего левого угла в правый нижний. Другая диагональ называется <u>побочной</u>.

Матрицы **<u>равны между собой</u>**, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

A=B, если $a_{ij} = b_{ij}$, где i=1,2,...,m, j=1,2,...,n.

Типы матриц:

1. **Квадратная** матрица – это матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. **m=n**.

2. **Диагональная** матрица – это квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, т.е. $a_{ij}=0$, если $i \neq j$ и $a_{ij} \neq 0$, если $i=j$.

3. **Единичная** матрица – это диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, т.е. $a_{ij}=1$, если $i=j$. Символ: **Е**.

4. **Треугольная** матрица – это квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

5. **Нулевая** матрица – это матрица, все элементы которой равны нулю. Символ: **О**.

в матричном исчислении матрицы ***О*** *и* ***Е*** *играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.*

6. **Вектор** матрица – это матрица, содержащая один столбец (матрица - столбец) или одну строку (матрица - строка), т.е. $\underset{mx1}{A}, \underset{1xn}{B}$.

7. Матрица **размера 1x1**, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, например, $(29)_{1x1}$ есть просто число 29, т.е. **не является матрицей**.

8. Матрица называется **ступенчатой**, если:

1. все ее нулевые строки стоят после ненулевых;
2. в каждой ненулевой строке, начиная со второго, ее главный элемент стоит правее (в столбце с большим номером) главного элемента предыдущей строки.

9. Матрица, **транспонированная** к данной – это матрица, полученная из данной, путём замены каждой её строки столбцом с тем же номером. Символ: $\mathbf{A^T}$.

Пример (№1) на каждый тип:

Действия над матрицами:

1. СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ.

Операция вводится только для матриц одинакового размера.

$$\underset{mxn}{A}\left(a_{ij}\right)+\underset{mxn}{B}\left(b_{ij}\right)=\underset{mxn}{C}\left(c_{ij}\right), \text{ где } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} .$$

Пример (№2):

Аналогично определяется РАЗНОСТЬ матриц.

2. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО k (k=/0).

Операция вводится для любых матриц.

$$\underset{m x n}{A}\left(a_{ij}\right)\cdot k=\underset{m x n}{B}\left(b_{ij}\right), \text{ где } b_{ij}=a_{ij}\cdot k.$$

Пример (№3):

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется **противоположной** матрице А.

Разность матриц ***A-B*** можно определить так: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Свойства операций сложения матриц и умножения матрицы на число:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $A\cdot 1=A$;
6. $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$;
7. $(k+p)\cdot A=k\cdot A+p\cdot A$;
8. $k\cdot(p\cdot A)=(k\cdot p)\cdot A$,

где A, B, C – матрицы, k и p – числа.

3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ двух МАТРИЦ.

Операция вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

$$\underset{m x n}{A}\left(a_{ij}\right)\cdot \underset{n x k}{B}\left(b_{jk}\right)=\underset{m x k}{C}\left(c_{ik}\right),$$

где c_{ik} – (элемент i - й строки и k – ого столбца матрицы С) равен сумме произведений элементов i – й строки матрицы A на соответствующие элементы k – ого столбца матрицы B.

Если матрицы A и B *квадратные одного размера*, то произведение $A\cdot B$ и $B\cdot A$ всегда существует. Очевидно, что $A\cdot E=E\cdot A=A$.

Пример (№4):

Свойства произведения двух матриц:

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
2. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
3. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

4. $k\cdot(A\cdot B)=(k\cdot A)\cdot B$,

если конечно, написанные суммы и произведения имеют смысл.

<u>ВАЖНО</u>: в общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Если $A\cdot B=B\cdot A$, то матрицы *A* и *B* называются <u>*перестановочными*</u>.

Пример (№5):

Свойства транспонированных матриц:

1. $(A+B)^T=A^T+B^T$; 2. $(A\cdot B)^T=A^T\cdot B^T$; 3. $\left(A^T\right)^T=A$.

4. <u>ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ</u>.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка двух параллельных рядов матрицы;

- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;

- прибавление ко всем элементам ряда матрицы (строка) соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

<u>Эквивалентными</u> называются две матрицы А и В, если одна из них получена из другой с помощью элементарных преобразований. Символика: **А~В**.

При помощи элементарных преобразований можно <u>*любую*</u> матрицу привести к <u>*треугольному*</u> или <u>*ступенчатому*</u> типу.

Пример (№6): $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\to E$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & . & . \\ 0 & 0 & . \end{pmatrix}$

определение:

<u>Определителем</u> называется число $\det A$(или $|A|$, или ΔA), которое можно поставить в соответствие квадратной матрице *A* порядка *n*, следующим образом:

1. $n=1$. $\underset{1x1}{A}(a_{11})=a_{11}$; $\Delta A=a_{11}$.

2. $n=2$. $\underset{2x2}{A}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$; $\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

3. $n=3$. $\underset{3x3}{A}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$;

$$\Delta A=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-\left(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{32}a_{23}a_{11}\right).$$

Примеры (№7): вычислить $\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\-7 & 8\end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\5 & -2 & 1\\1 & 3 & -4\end{vmatrix}$.

Ответ: $\Delta_2=37, \Delta_3=31.$

Методы вычисления определителей порядков $n>3$рассмотрим позже.

Свойства определителей: (самостоятельно проработать)

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

2. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на некоторое число λ равносильно умножению определителя на это число.

3. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца, то определитель изменяет свой знак на противоположный.

4. Если матрица содержит нулевую строку (столбец), то определитель этой матрицы равен нулю.

5. Если две строки (столбца) матрицы равны между собой, то определитель этой матрицы равен нулю.

6. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны друг другу, то определитель этой матрицы равен нулю.

7. Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

8. Определитель не изменится, если к элементам любой его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или соответствующего столбца), умноженные на одно и тоже число.

9. Пусть *A* и *B* – квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц *A* и *B*.

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятием МИНОРА и АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ДОПОЛНЕНИЯ.

определение:

Минором некоторого **элемента a_{ij} определителя n – ого порядка** называется определитель (n-1) – ого порядка, полученный из исходного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Символ: M_{ij}.

Пример (№8): $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Найти M_{13} и M_{32}.

Ответ: $M_{13} = -3, M_{32} = -6.$

определение:

<u>Алгебраическим дополнением элемента a_{ij}</u> определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если *i*+*j* – чётное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечётная.

Символика: $$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Пример (№9): найти A_{13} и A_{32} для примера №8.

Ответ: $A_{13} = -3, A_{32} = 6.$

<u>свойство 10</u>. «Разложение определителя по элементам некоторого ряда». Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{32}A_{32} = \ldots$$

Вопрос: сколько вариантов разложений можно написать?

Пример (№10): вычислить $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответ: $\Delta_3 = -5$.

Определители, порядков выше 3-*его*, сводятся к определителям 3–*его* порядка, путём разложения определителя по элементам выбранного ряда по свойству 10.

Пример (№11): вычислить $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Ответ: $\Delta_4 = -11$.

определение:

Квадратная матрица А *n – ого* порядка называется **<u>невырожденной</u>**, если её определитель не равен нулю (ΔА≠0)**.** В противном случае матрица А называется **<u>вырожденной</u>** (ΔА=0).

определение:

Матрица $\mathbf{A^{-1}}$ называется **<u>обратной</u>** к матрице А, если выполняется условие

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E\,,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Вопрос: какой размер у матрицы A^{-1}?

Свойства обратной матрицы:

1. $\Delta A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}$;   2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;   3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

<u>*Алгоритм нахождения обратной матрицы:*</u>

1. Вычислить ΔA. Если $\Delta A \neq 0$, то матрица A – невырожденная и $\Rightarrow$ имеет обратную.

вопрос: если $\Delta A=0$, то ...?

2. Записать A^{T}.

3. Вычислить алгебраические дополнения A_{ij} для A^{T}.

4. Записать обратную матрицу согласно форме: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{pmatrix}$.

5. Выполнить проверку: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

6. Записать ответ.

Пример (№12): $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

Ответ: $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Знакомство с матричными уравнениями. Решение матричных уравнений.

Пример (№13): $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$

Ответ: $x = -\dfrac{59}{11}, y = -\dfrac{10}{11}$.

определение:

<u>Рангом матрицы</u> называется наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля. Символика: *rangA* или *r(A)*.

Свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы её ранг не меняется.

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то её ранг матрицы не изменится.

3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

определение 2 (для нахождения ранга матрицы):

<u>Ранг матрицы</u> равен числу ненулевых строк матрицы после приведения её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Пример (№14): найти ранг матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

Ответ: $r(C)=2$.

определение:

<u>Системой линейных алгебраических уравнений (СЛУ)</u>, содержащей ***m*** уравнений и ***n*** неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} (i=1, 2, …, m, j=1, 2, …, n) – числа, коэффициенты при неизвестных,

b_i - числа, свободные члены,

x_n – неизвестные, подлежат нахождению.

<u>Формы записи СЛУ:</u>

<u>Матричная форма</u> $\underset{mxn}{A} \cdot \underset{nx1}{X} = \underset{mx1}{B}$,

(смотри матричные уравнения),

где A - матрица коэффициентов системы – *<u>основная матрица</u>* системы:

$\underset{mxn}{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$, $\underset{nx1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор - столбец из $\underset{mx1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ - вектор – столбец из неизвестных x_j, свободных членов b_i.

Расширенная матрица системы – матрица A дополненная столбцом свободных членов B. Другими словами, матрица, включающая в себя и матрицу A, и матрицу B.

$$A/B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}b_2 \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы, состоящей из m - уравнений с n – неизвестными называются n чисел, которые при подстановке обращают все m уравнений системы в верные равенства.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет *хотя бы одно решение*, и **несовместной**, если она не имеет *ни одного решения*.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет *единственное решение*, и *неопределённой*, если она имеет *более одного решения*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти её общее решение.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Однородная система всегда совместна, так как всегда имеет *нулевое* или тривиальное решение.

Теорема Кронекера – Капелли: Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

$$rang\left(A/B\right) \neq rang(A) \Leftrightarrow СЛУ несовместна \ (нет \ решений);$$
$$rang\left(A/B\right) = rang(A) = n \Leftrightarrow СЛУ совместна, \ определена \ (одно \ решение);$$
$$rang\left(A/B\right) = rang(A) < n \Leftrightarrow СЛУ совместна, \ неопределена \ (множество \ решений).$$

Пример (№15): $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+3t=3 \end{cases}$

Ответ: $r(A/B)=2,\ r(A)=2,\ n=4.$ Следовательно СЛУ совместна и неопределена (т.е. имеет бесконечное число решений).

<u>Решение невырожденных СЛУ:</u>

<u>1. ***Метод обратной матрицы***</u> *(см. матричные уравнения)*;

$$\underset{mxn}{A}\cdot \underset{nx1}{X}=\underset{mx1}{B}\Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

<u>2. ***Формулы Крамера***</u>: $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta};\ y=\dfrac{\Delta y}{\Delta};\ z=\dfrac{\Delta z}{\Delta}$, где $\Delta -$ *основной определитель системы*, $\Delta x-$ дополнительный, полученный из основного путём замены столбца коэффициентов при неизвестном x на столбец свободных членов. Аналогично $\Delta y,\ \Delta z$.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+a_{13}\cdot z=b_1 \\ a_{21}\cdot x+a_{22}\cdot y+a_{23}\cdot z=b_2 \\ a_{31}\cdot x+a_{32}\cdot y+a_{33}\cdot z=b_3 \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta x=\begin{vmatrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_3a_{32}a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta y=\begin{vmatrix} a_{11}b_1a_{13} \\ a_{21}b_2a_{23} \\ a_{31}b_3a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta z=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}b_1 \\ a_{21}a_{22}b_2 \\ a_{31}a_{32}b_3 \end{vmatrix}.$$

Пример (№16): $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 4x+5y+6z=8 \\ 7x+8y=2 \end{cases}$

Ответ: $x=-2, y=2, z=1.$

<u>3. ***Метод Гаусса***</u> (универсальный метод): записать расширенную матрицу системы, привести её к ступенчатому (треугольному) виду, записать СЛУ и решить её снизу вверх.

Пример (№17): $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y-2z=-10 \\ 5x-y-z=24 \end{cases}$

Ответ: $x=5, y=-\dfrac{18}{5}, z=\dfrac{23}{5}.$

Задачи для решения: литература [Лунгу К.Н., 1 курс].

Матрицы и действия с ними: 1.1.36, 1.1.40, 1.1.41, 1.1.9, 1.1.43, 1.1.13, 1.1.55, 1.1.22, 1.1.23, 1.1.26, 1.1.30, 1.1.32, 1.1.85, 1.1.87;

Вычисление определителей: 1.2.2, 1.2.8, 1.2.17, 1.2.23, 1.2.26, 1.2.32, 1.2.33, 1.2.45, 1.2.47;

Ранг матрицы, обратная матрица: 1.3.2, 1.3.18, 1.4.10, 1.4.13, 1.4.43;

Матричные уравнения: 1.4.29, 1.4.30, 1.4.31, 1.4.321.4.36;

Решение невырожденных СЛУ (все методы): 2.2.4, 2.2.9, 2.2.10;

Исследование СЛУ на совместность (теорема Кронекера - Капелли): 2.1.5, 2.1.9, 2.1.40, 2.1.33, 2.1.37, 2.1.43.